



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE  
**Centro Regional Universitario Bariloche**

PROGRAMA DE CATEDRA: **Geometría de curvas y superficies**

AÑO ACADÉMICO: **2014**

CARRERA A LA QUE PERTENECE: **Licenciatura en Ciencias Matemáticas**

PLAN DE ESTUDIOS N°: 0187/98

CARGA HORARIA SEMANAL SEGÚN PLAN DE ESTUDIOS: **8**

REGIMEN: **Cuatrimestral**

EQUIPO DE CATEDRA:

Dr. Claudio Padra  
Maximiliano Palacios

CARGO:

Profesor Adjunto (PAD3)  
Asistente de cátedra (ASD3)

ASIGNATURA CORRELATIVA: Aprobadas: Cálculo III y Geometría Analítica.

Regularizada: Introducción al análisis.

---

1. **FUNDAMENTACIÓN:**

La geometría como estudio de las curvas y superficies más sencillas es una disciplina muy antigua. En este curso nos dedicaremos al estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies en el espacio tridimensional ordinario, a la cual le podemos dar además los calificativos de métrica y analítica. Decir que la geometría es analítica es porque se emplean sistemas de coordenadas y así se puede utilizar métodos de álgebra y análisis. Además, que la geometría sea métrica se caracteriza diciendo que es el estudio de las propiedades de las figuras que son invariantes cuando se someten a movimientos rígidos, es decir rotaciones y traslaciones. Así la medida de ciertas cantidades como, por ejemplo, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos rectas o el área de un triángulo son invariantes por movimientos rígidos, lo que justifica el nombre de geometría métrica. En el siglo XIX quedaron establecidas tanto las ecuaciones fundamentales de la teoría de curvas (ecuaciones de Frenet) como las de superficies (formas fundamentales y estudio intrínseco). Una primera motivación para el estudio de la geometría surge inmediatamente: la conveniencia de formarse imágenes mentales de fenómenos físicos. La geometría diferencial de una figura se refiere a las propiedades de la misma que dependen sólo de un entorno de uno de sus elementos. La definición bien conocida de tangente en un punto a una curva, establecida como el límite de las secantes que pasan por dicho punto y por otro próximo a él sobre la curva, cuando el segundo punto se aproxima al primero a lo largo de la curva, es tal vez la definición geométrica más simple que tiene un carácter diferencial natural; obviamente depende sólo de un entorno de su punto de contacto.

2. **OBJETIVOS:**

El objetivo general del desarrollo de las unidades de este programa es introducir al estudiante de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en el estudio de la geometría diferencial, tendiendo

a desarrollar una estructura de pensamiento que posibilite encarar estudios posteriores en el área, sirva como base firme para el desarrollo de tareas de investigación y brinde herramientas de comprensión necesarias para la lectura de trabajos dentro de su especialidad.

Como objetivos específicos nos proponemos:

- estudiar los tópicos tradicionales de la Geometría Diferencial en un campo euclídeo tridimensional, y aplicar estos conceptos en la solución de problemas selectos de la física matemática. Analizar propiedades de las curvas, y establecer una teoría general de superficies.
- desarrollar en el estudiante un pensamiento matemático, en el que vayan a la par la comprensión clara de los diferentes conceptos y una experiencia importante en la modelación y resolución de problemas utilizando las técnicas matemáticas.
- desarrollar en los alumnos habilidades tanto para la comprensión de la demostración de teoremas como para la obtención de conclusiones sólidas a partir de hipótesis dadas y su capacidad para idear demostraciones.

### 3. **CONTENIDOS SEGÚN PLAN DE ESTUDIOS:**

- Curvas en  $\mathcal{R}^n$ . Curvas, longitud de arco y parametrización por longitud de arco. Curvas planas. Curvatura de curvas planas. Rigidez de curvas planas por curvatura. Curvas en  $\mathcal{R}^3$ , curvatura y torsión. Triedro de Frenet. Rigidez de curvas en  $\mathcal{R}^3$  por curvatura y torsión.
- Superficies regulares, coordenadas. Ejemplos: plano, cilindro, cono, esfera  $S^2$ , toro de revolución, superficies de revolución. Imagen inversa de un valor regular. Cambio de coordenadas. Funciones diferenciables, la diferencial. Teorema de la función inversa en superficies. Geometría de la primera forma cuadrática. Isometrías, isometrías locales, superficies localmente isométricas. Campo de vectores normales. Superficies orientables, orientación.

### 4. **CONTENIDO PROGRAMA ANALÍTICO:**

#### **Unidad 1: Curvas en el plano y en el espacio:**

Curvas diferenciables. Parametrizaciones. Longitud de una curva. Parámetro de longitud de arco. Curvatura y torsión de curvas en el espacio. Triedro de Frenet. Ecuaciones de Frenet. Curvas planas. Triedro de Frenet. Teorema fundamental de curvas en el plano y en el espacio.

#### **Unidad 2: Superficies en el espacio.**

Superficies regulares en el espacio. Cambio de parámetros. Funciones y aplicaciones diferenciables sobre superficies. Plano tangente. Primera forma fundamental. Diferencial de una aplicación diferenciable. Orientabilidad.

#### **Unidad 3: Aplicación de Gauss. Curvaturas.**

La aplicación de Gauss y el operador de Weingarten. Segunda forma fundamental y secciones normales: Curvatura normal y Teorema de Meusnier; curvaturas principales y fórmula de Euler. Curvatura de Gauss  $K$  y curvatura media  $H$ . Direcciones principales y líneas de curvatura. Campos vectoriales. Superficies regladas y superficies mínimas.

#### **Unidad 4: Geometría intrínseca de superficies.**

Isometrías. Ecuaciones de compatibilidad. El teorema egregium de Gauss. La curvatura de Gauss como invariante isométrico. Transporte paralelo. Geodésicas. El teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones. La aplicación exponencial. Coordenadas geodésicas.

## **5. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA Y DE CONSULTA:**

- Do Carmo, M.P., Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial, Madrid, 1992.
- Millman R.S., Parker G.D., Elements of Differential Geometry, New Jersey, 1977.
- O'Neil B., Elements of Differential Geometry, Academic Press, London, 1966.
- Oprea, J.: Differential Geometry and its applications. Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- Pressley A., Elementary differential geometry Springer-Verlag, London, 2001.
- REY PASTOR, J. y otros. Análisis matemático. Tomo 2. Editorial Kapeluz.
- Sharipov R. A., Course of Differential Geometry, Bashkir State University, Ufa, 1996.
- Stokker J.J., Differential Geometry, Wiley, Toronto, 1969.
- Toponogov, V.A. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhauser, Berlin, 2006.

## **6. PROPUESTA METODOLÓGICA:**

El desarrollo de la asignatura se programó integrando dos tipos de actividades: 1) clases teóricas, donde se introducen los conceptos de la teoría y donde se evidencia la necesidad del estudio de estos conceptos, luego se profundiza en la teoría matemática, para mostrar por último, el uso de la teoría desarrollada en problemas específicos, volviendo así a la situación original que planteó la necesidad de conocimiento del tema, 2) clases prácticas, que se organizan mediante guías de trabajos prácticos. A cada unidad del programa corresponde una guía de trabajos prácticos.

## **7. EVALUACIÓN Y CONDICIONES DE ACREDITACIÓN:**

Durante el cursado de la materia, se tomarán dos exámenes parciales. Cada uno de ellos tiene una instancia recuperatoria. Cada examen parcial evalúa un grupo de unidades del programa e integra las anteriores (ver cronograma tentativo). Las calificaciones posibles para los parciales son A (Aprobado con promoción, equivalente a 8 puntos), B (aprobado sin promoción) y D (Desaprobado) La aprobación de los dos exámenes parciales o sus recuperatorios con una calificación no inferior a B, implica la aprobación de la cursada de la materia. Para optar a la promoción de la asignatura los alumnos deberán aprobar los dos exámenes parciales o sus recuperatorios con un mínimo de 8 puntos. En caso contrario el alumno deberá rendir un examen final regular a fin de completar la aprobación de la asignatura. Si un alumno obtiene una calificación D en un parcial y su recuperatorio, perderá la condición de alumno regular de la materia. En caso de perder la regularidad de la materia, el alumno puede rendir un examen libre como único requisito para aprobar la materia, lo cual puede hacerse en los turnos de examen previstos a tal fin.

## **8. DISTRIBUCIÓN HORARIA:**

La carga horaria se dividirá en dos partes: 4 horas semanales para el desarrollo de los trabajos prácticos y 4 horas semanales para clases teóricas. Se ofrecerán clases de consulta, dos horas por semana.

9. **CRONOGRAMA TENTATIVO:**

Primer parcial: evalúa la Unidad 1 y 2: mediados de mayo.  
Segundo parcial: evalúa las Unidades 3, 4 y 5: fines de junio



**PROFESOR**  
Claudio Padra



**CONFORMIDAD DEL DEPARTAMENTO**



Lic. MARÍA INES SANCHEZ  
Secretaría Académica  
Centro Regional Universitario Bariloche  
Universidad Nacional del Comahue

CONFORMIDAD DEL CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE